

EKVIVALENS EGYENLETEK

ELMÉLET

Ha két egyenletnek ugyanazon az alaphalmazon ugyanaz a megoldáshalmaza, akkor ezeket az egyenleteket **ekvivalensnek** mondjuk a tekintett alaphalmazon. Az *ekvivalens* szó latin eredetű, magyarul egyenértékűt jelent.

Ha olyan átalakításokat végzünk egy egyenlet megoldásakor, amely során nem változnak meg az egyenlet gyökei, akkor azt mondjuk, hogy **ekvivalens átalakításokat** végeztünk. Például ilyen átalakítás lehet a mérlegelv alkalmazása.

Figyelnünk kell azonban az egyenletek rendezése közben:

1. Ha négyzetre emeljük egy egyenlet mindkét oldalát, akkor lehetséges, hogy az új egyenletnek már több gyöke van az alaphalmazon, mint az eredeti egyenletnek. Ebben az esetben tehát hamis gyököket kaphatunk.
Behelyettesítéssel ellenőrizni kell, hogy a kapott gyökök megoldásai-e az eredeti egyenletnek.
2. Ha az $(f(x))^2 = (g(x))^2$ egyenlet helyett az $f(x) = g(x)$ egyenletet vizsgáljuk, akkor lehetséges, hogy az új egyenletnek kevesebb gyöke van, mint az eredetinek, és nem találjuk meg így a feladat összes megoldását. Ilyenkor tehát gyököket veszíthetünk.

FELADATOK

- 1.** Hasonlítsuk össze az egyenleteket! Ugyanazok-e a megoldásaik a valós számok halmazán?

a) $x^2 = 4$; $x^2 - 4 = 0$; $|x| = 2$

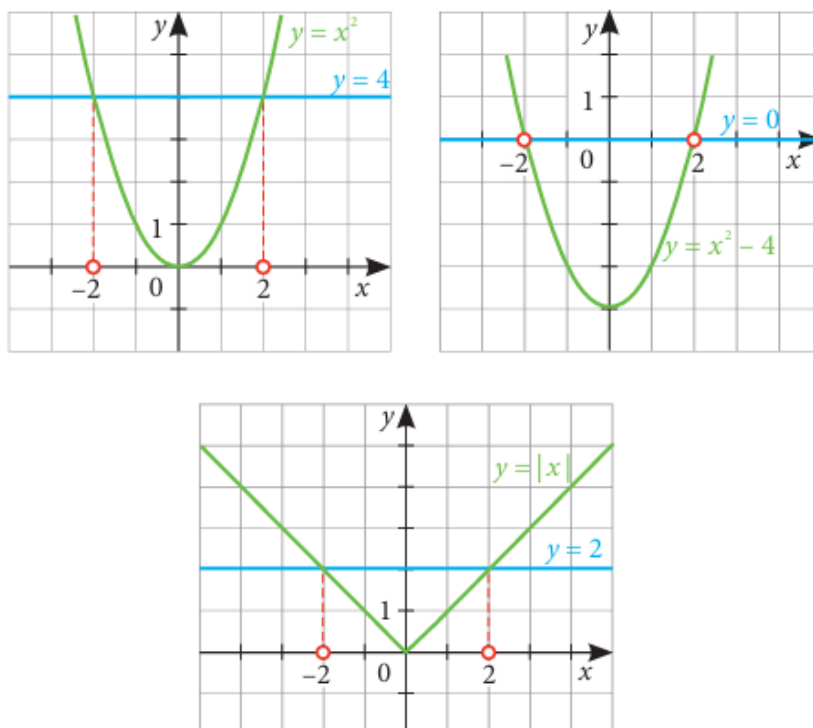
b) $x + 3 = 7$ és $(x + 3)^2 = 49$

Megoldás:

a) $x^2 = 4$; $x^2 - 4 = 0$; $|x| = 2$

Mindegyik egyenletnek két gyöke van: a 2 és a -2 .

Ábrázoltuk grafikonon is az egyenleteket:



Az egyenletek gyökei megegyeznek. Azt mondjuk erre, hogy ezek az egyenletek **ekvivalensek** a valós számok halmazán.

b) $x + 3 = 7$ és $(x + 3)^2 = 49$

Az első egyenlet megoldása $x = 4$. Ez természetesen megoldása a második egyenletnek is, de annak van egy másik megoldása is!

$$(x + 3)^2 = 49 \Rightarrow x + 3 = 7 \text{ vagy } x + 3 = -7.$$

Ebből: $x = 4$ vagy $x = -10$.

Ez a két egyenlet **nem ekvivalens** egymással a valós számok halmazán.

2. Oldjuk meg a $\sqrt{x} = x - 2$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

1. Mi az egyenlet értelmezési tartománya?

A gyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért $x \geq 0$.

2. Oldjuk meg az egyenletet!

A megoldáshoz emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$$x = (x - 2)^2$$

Bontsuk fel a zárójelet, és hozzuk olyan alakra az egyenletet, amelynél a megoldóképlet alkalmazható.

$$x = x^2 - 4x + 4.$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Megoldóképlettel: $x = 4$ vagy $x = 1$.

3. Behelyettesítéssel ellenőrizzük az eredményeket:

4-et behelyettesítve: $\sqrt{4} = 4 - 2$.

De 1-et behelyettesítve: $\sqrt{1} \neq 1 - 2$.

Az egyenletnek csak egy gyöke van, a 4.

1. Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldóképletéből kimaradt néhány szám. Melyek a hiányzó számok? $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \square ac}}{\square a}$

Megoldás:

A másodfokú egyenlet általános alakja: $ax^2 + bx + c = 0$. Ebből az ismeretlen x értéke az alábbi képlettel számítható ki:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Összegezve a feladatodhoz:

- A felső négyzetbe a 4-es szám kerül.
- Az alsó négyzetbe a 2-es szám kerül.

2. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán, majd vond ki a nagyobbik gyökből a kisebbiket! A különbséghez tartozó betűkből egy magyar város neve rakható ki. Melyik ez a város?

$x^2 - 9x + 8 = 0$	6 Á	7 R	8 Ö
$x^2 - 7x - 30 = 0$	13 I	14 E	15 P
$4x^2 + 16x - 65 = 0$	7 E	8 P	9 Z
$4x^2 + 20x - 11 = 0$	5 A	6 C	7 G

Megoldás:

1. egyenlet: $x^2 - 9x + 8 = 0$

- Együtthatók: $a = 1, b = -9, c = 8$
- Megoldás: $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2}$
- Gyökök: $x_1 = 8, x_2 = 1$
- Különbség ($x_{max} - x_{min}$): $8 - 1 = 7$
- Betű: R (a táblázat alapján a 7-eshez az R tartozik)

2. egyenlet: $x^2 - 7x - 30 = 0$

- Együtthatók: $a = 1, b = -7, c = -30$
- Megoldás: $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{7 \pm 13}{2}$
- Gyökök: $x_1 = 10, x_2 = -3$
- Különbség: $10 - (-3) = 10 + 3 = 13$
- Betű: I

3. egyenlet: $4x^2 + 16x - 65 = 0$

- Együtthatók: $a = 4, b = 16, c = -65$
- Megoldás: $x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 4 \cdot (-65)}}{8} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 1040}}{8} = \frac{-16 \pm \sqrt{1296}}{8} = \frac{-16 \pm 36}{8}$
- Gyökök: $x_1 = 2,5, x_2 = -6,5$
- Különbség: $2,5 - (-6,5) = 2,5 + 6,5 = 9$
- Betű: Z

4. egyenlet: $4x^2 + 20x - 11 = 0$

- Együtthatók: $a = 4, b = 20, c = -11$
- Megoldás: $x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 4 \cdot (-11)}}{8} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 176}}{8} = \frac{-20 \pm \sqrt{576}}{8} = \frac{-20 \pm 24}{8}$
- Gyökök: $x_1 = 0,5, x_2 = -5,5$
- Különbség: $0,5 - (-5,5) = 0,5 + 5,5 = 6$
- Betű: C

Az eredmény: A kapott betűk: R, I, Z, C.

Ezekből a betűkből összeállítható magyar város: **ZIRC**.

3. ☞ Megegyeznek-e a két egyenlet gyökei a valós számok halmazán?

a) $3(2 - x) + 7 = \frac{5x + 13}{4}$ és

$$12(2 - x) + 28 = 5x + 13$$

b) $(x + 8)^2 = (4 - 3x)^2$ és $x + 8 = 4 - 3x$

c) az $\frac{(x - 3)(x + 5)}{(x + 2)(x + 5)} = -\frac{2}{3}$ egyenlet és a

$$3(x - 3) = -2(x + 2) \text{ egyenlet?}$$

Megoldás:

a)

Az első egyenlet:

$$3(2 - x) + 7 = \frac{5x + 13}{4}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, hogy eltüntessük a törtet:

$$4 \cdot [3(2 - x) + 7] = 5x + 13$$

$$12(2 - x) + 28 = 5x + 13$$

Ez pontosan megegyezik a második megadott egyenlettel. Mivel az átalakítás során csak egy nem nulla számmal szoroztunk (ami megengedett mérlegelv), a két egyenlet gyökei megegyeznek.

b)

Itt két különböző típusú egyenletet látunk.

Második egyenlet:

$$x + 8 = 4 - 3x$$

Rendezzük:

$$4x = -4 \Rightarrow x = -1$$

Ennek egyetlen megoldása van.

Első egyenlet:

$$(x + 8)^2 = (4 - 3x)^2$$

Vegyünk gyököt mindkét oldalból!

Fontos:

ha $a^2 = b^2$, akkor vagy $a = b$, vagy $a = -b$.

1. eset ($a = b$):

$$x + 8 = 4 - 3x$$

Ez ugyanaz, mint a fenti egyenlet, ebből jön az $x = -1$

2. eset ($a = -b$):

$$x + 8 = -(4 - 3x)$$

$$x + 8 = -4 + 3x$$

$$12 = 2x \Rightarrow x = 6$$

Következtetés: A két egyenlet gyökei nem egyeznek meg teljesen. Bár az $x = -1$ mindkettőnek megoldása, a négyzetes egyenletnek van egy plusz gyöke ($x = 6$), ami a lineáris egyenletnek nem megoldása.

c)

Ez egy nagyon trükkös feladat, mert első ránézésre azt mondanánk, hogy igen, de a matematika ördöge a részletekben (pontosabban az értelmezési tartományban) rejlik.

1. Az értelmezési tartomány vizsgálata

Ez a legfontosabb lépés.

A törtes egyenletnél a nevező nem lehet nulla:

$$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

$$x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$$

Tehát az első egyenletnek nem lehet megoldása az $x = -5$

2. Az egyenletek megoldása

Első egyenlet:

$$\frac{(x-3)(x+5)}{(x+2)(x+5)} = -\frac{2}{3}$$

Ha egyszerűsítünk $(x+5)$ -tel (feltételezve, hogy x nem lehet -5), akkor:

$$\frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}$$

Keresztbe szorzunk:

$$3(x-3) = -2(x+2)$$

$$3x - 9 = -2x - 4$$

$$5x = 5 \Rightarrow x = 1$$

Második egyenlet:

$$3(x-3) = -2(x+2)$$

Látjuk, hogy ez ugyanaz a forma, amit az elsőből kaptunk az egyszerűsítés után. Ennek is $x = 1$ a megoldása.

Akkor most ekvivalensek?

Igen.

Bár az értelmezési tartományuk különböző (a második egyenletbe behelyettesíthetnénk a -5 -öt is, míg az elsőbe nem), a konkrét megoldáshalmazuk megegyezik: mindkét egyenletnek egyetlen valós megoldása van, az $x = 1$.

Mivel az $x = 1$ egyik esetben sem ütközik a kizárásokkal (mert nem -2 vagy -5), így mindkét egyenlet gyöke ugyanaz a szám.

Megjegyzés: Két egyenletet akkor nevezünk ekvivalensnek, ha a megoldáshalmazuk (az adott alaphalmazon) azonos. Itt mindkét halmaz $\{1\}$, tehát az egyenletek ekvivalensek.

4 Ekvivalens-e az $\mathbb{R}$ alaphalmazon

a) az $\frac{x^2 + 2x}{x} = 2$ egyenlet és az $x^2 + 2x = 2x$ egyenlet;

b) az $5x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ egyenlet és az $5x = 0$ egyenlet;

c) az $\frac{(x-3)(x+5)}{(x+2)(x+5)} = -\frac{2}{3}$ egyenlet és a $3(x-3) = -2(x+2)$ egyenlet?

Megoldás:

a)

1. egyenlet:

$$\frac{x^2 + 2x}{x} = 2$$

1. Kikötések:

A nevezőben nem állhat nulla: $x \neq 0$

2. Megoldás:

Emeljük ki x -et a számlálóból:

$$\frac{x(x+2)}{x} = 2 \Rightarrow x + 2 = 2 \Rightarrow x$$

Mivel a kikötés szerint x nem lehet 0, ennek az egyenletnek nincs megoldása (üres halmaz).

2. egyenlet:

$$x^2 + 2x = 2x$$

Megoldás:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ennek a megoldása a 0.

Következtetés: Nem ekvivalensek, mert az elsőnek nincs megoldása, a másodiknak pedig a 0.

b)

1. egyenlet:

$$5x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

1. Kikötések:

A nevezőben nem állhat nulla: $x \neq 0$

2. Megoldás:

Vonjunk ki $1/x$ -et mindkét oldalból:

$$5x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Mivel a kikötés szerint x nem lehet 0, ennek az egyenletnek nincs megoldása (üres halmaz).

2. egyenlet:

$$5x = 0$$

Megoldás:

$$x = 0$$

Ennek az alaphalmazon ($\mathbb{R}$) a 0 a megoldása.

Következtetés: Nem ekvivalensek, mert az elsőnek nincs megoldása, a másodiknak pedig a 0.

c)

1. egyenlet:

$$\frac{(x-3)(x+5)}{(x+2)(x+5)} = -\frac{2}{3}$$

1. Kikötések:

A nevezőben nem állhat nulla

$$\Rightarrow x \neq -2, x \neq -5$$

2. Megoldás:

Egyszerűsítés, rendezés után

$$x = 1$$

2. egyenlet:

$$3(x-3) = -2(x+2)$$

Megoldás:

Nincs kikötés, hiszen polinom.

$$3x - 9 = -2x - 4 \Rightarrow 5x = 5$$

$$x = 1$$

Következtetés: Ekvivalensek, mert mindkét egyenlet egyetlen megoldása az $x = 1$.

5  Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmaza-
zán!

a) $\sqrt{x} = 6 - x$

b) $\sqrt{2x} = 4 - x$

Megoldás:

a)

$$\sqrt{x} = 6 - x$$

1. Kikötések:

A gyök alatt nem állhat negatív szám: $x \geq 0$

Mivel a gyök értéke nem negatív, a jobb oldalnak is annak kell lennie:

$$6 - x \geq 0$$

Tehát a megoldást a $[0; 6]$ intervallumban keressük.

2. Megoldás:

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$(\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2$$

$$x = 36 - 12x + x^2$$

Rendezzük 0-ra:

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

A másodfokú megoldóképletet használva:

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 9 \text{ (Ez nem jó, mert kiesik a } [0; 6] \text{ tartományból: } \sqrt{9} \neq 6 - 9, \text{ mivel } 3 \neq -3)$$

$$x_2 = 4 \text{ (Ez jó: } 4 \in [0; 6])$$

3. Ellenőrzés:

$$\sqrt{4} = 6 - 4 \Rightarrow 2 = 2$$

Tehát a **megoldás: $x = 4$**

b)

$$\sqrt{2x} = 4 - x$$

1. Kikötések:

$$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4.$$

Tartomány: $[0; 4]$.

2. Megoldás:

$$2x = (4 - x)^2$$

$$2x = 16 - 8x + x^2$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 8 \text{ (Nem jó, mert nagyobb 4-nél: } \sqrt{16} \neq 4 - 8 \text{)}$$

$$x_2 = 2 \text{ (Ez jó: } 2 \in [0; 4] \text{)}$$

3. Ellenőrzés:

$$\sqrt{2 \cdot 2} = 4 - 2 \Rightarrow \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

Tehát a **megoldás $x = 2$** .

6 Ekvivalens-e az $\mathbf{R}$ alaphalmazon a két egyenlet?

a) $\sqrt{x} = 2 - x$ és $x = (2 - x)^2$

b) $\sqrt{x} = x + 10$ és $x = x^2 + 20x + 100$

Megoldás:

a)

$$\sqrt{x} = 2 - x \text{ és } x = (2 - x)^2$$

1. egyenlet:

1. Kikötések:

A gyök alatt nem állhat negatív szám:

$$x \geq 0$$

Mivel a gyök értéke nem negatív, a jobb oldalnak is annak kell lennie:

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2. \text{ Tehát } x \in [0, 2].$$

2. Megoldás:

Emeljük négyzetre:

$$x = (2 - x)^2 \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2$$

Így a gyökök:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

Mivel a kikötés szerint x legalább 2, így a valódi megoldás csak $x = 4$.

2. egyenlet:

Itt nincs kikötés a jobb oldalra, így mindkét gyök ($x_1 = 1$, $x_2 = 4$) megoldása az egyenletnek.

Ellenőrzés:

$$4 = (2 - 4)^2 \Rightarrow 4 = (-2)^2$$

Következtetés: Nem ekvivalensek, mert a második egyenletnek van egy plusz megoldása ($x = 4$), ami az elsőnek nem megoldása.

b)

$$\sqrt{x} = x + 10 \text{ és } x = x^2 + 20x + 100$$

1. egyenlet:

1. Kikötések:

A gyök alatt nem állhat negatív szám:

$$x \geq 0$$

Mivel a gyök értéke nem negatív, a jobb oldalnak is annak kell lennie:

$$x + 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -10$$

2. Megoldás:

Emeljük négyzetre:

$$x = (x + 10)^2 \Rightarrow x = x^2 + 20x + 100$$

Rendezve:

$$x^2 + 19x + 100 = 0$$

A diszkrimináns:

$$D = 19^2 - 4 \cdot 100 = 361 - 400 = -39$$

Mivel a diszkrimináns negatív, az első egyenletnek nincs valós megoldása.

2. egyenlet:

Ez pontosan ugyanaz a másodfokú egyenlet, amit az előbb kaptunk.

Ennek sincs valós megoldása.

Következtetés: Ekvivalensek, mert mindkét egyenlet megoldáshalmaza az üres halmaz a valós számok körében.